２０２１数学オリンピック予選　 問題11

梅山新一郎 2021年2月

以下の記述にあるプログラムはpythonで書かれています．ソースは梅屋萬年堂のホームページにあります．
`http://umeyamann.web.fc2.com/`

> 問11
>
> 1以上1000以下の整数からなる組 (x, y, z, w) すべてについて、$xy + zw$、$xz + yw$、$xw + yz$ の最大値を足し合わせた値を M とする。同様に1以上1000以下の整数からなる組すべてについて $xy + zw$、$xz + yw$、$xw + yz$ の最小値を足し合わせた値を m とする。このとき、$M - m$ の正の約数の個数を求めよ。

$X_y = xy + zw, X_z = xz + yz, X_w = xw + yz$ とし、5個の整数 n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 を $n_0 = 1000$、$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \le n_0$ とする。X_y, X_z, X_w の最大値を X_M、最小値を X_m とする。

x, y, z, w への n_1, n_2, n_3, n_4 の割り当てで場合分けする。

■C1　すべてが等しい $(x, y, z, w) = (n_1, n_1, n_1, n_1)$ とき
$X_y = X_z = X_w$ だから $X_M - X_m = 0$ で、その和は0。

■C2　３個等しい $(x, y, z, w) = (n_1, n_1, n_1, n_2)$ とき
$X_y = X_z = X_w = {n_1}^2 + n_1 n_2$ だから $X_M - X_m = 0$ で、その和は0。

■C3　等しい２個２組 $(x, y, z, w) = (n_1, n_1, n_2, n_2)$ とき
値が２種類しかないから、(n_1, n_1, n_2, n_2) の並びがどのようになっても X_y, X_z, X_w の値は ${n_1}^2 + {n_2}^2$ と $2n_1 n_2$ の２個だけで、${n_1}^2 + {n_2}^2 > 2n_1 n_2$ だから $X_M - X_m = ({n_1}^2 + {n_2}^2) - 2n_1 n_2$。同じもの２個ずつ $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ の並びがあるから、和は

$$S_{c3} = 6 \sum_{n_1=1}^{n_0-1} \sum_{n_2=n_1+1}^{n_0} \left\{ ({n_1}^2 + {n_2}^2) - (2n_1 n_2) \right\} = \frac{{n_0}^2 (n_0 - 1)(n_0 + 1)}{2}$$

■C4　３種類の整数 n_1, n_2, n_3 のどれかが２個あるとき

1. n_1 が２個　$(x, y, z, w) = (n_1, n_1, n_2, n_3)$
   $X_y = {n_1}^2 + n_2 n_3$、$X_z = X_w = n_1 n_2 + + n_1 n_3$。$(n_1, n_1, n_2, n_3)$ の並びを変えても X_y、X_z、X_w の値は ${n_1}^2 + n_2 n_3$、$n_1 n_2 + + n_1 n_3$ の２種類だけで $({n_1}^2 + n_2 n_3) - (n_1 n_2 + + n_1 n_3) = (n_1 - n_3)(n_1 - n_3) > 0$ だから $X_M - X_m = ({n_1}^2 + n_2 n_3) - (n_1 n_2 + + n_1 n_3)$
2. n_2 が２個　$(x, y, z, w) = (n_1, n_2, n_2, n_3)$
   $X_y = X_z = n_1 n_2 + n_2 n_3$、$X_w = n_1 n_3 + + {n_2}^2$。上と同様に、$(n_1, n_1, n_2, n_3)$ の並びを変えても X_y、X_z、X_w の値は２種類だけで $(n_1 n_2 + n_2 n_3) - (n_1 n_3 + + {n_2}^2) = (n_1 - n_2)(n_2 - n_3) > 0$ だから $X_M - X_m = (n_1 n_3 + n_2 n_3) - (n_1 n_3 + + {n_2}^2)$

3. n_3 が2個　$(x,y,z,w)=(n_1,n_2,n_3,n_3)$
   $X_y=n_1n_2+{n_3}^2$、$X_z=X_w=n_1n_3++n_2n_3$。上と同様に、(n_1,n_1,n_2,n_3) の並びを変えても X_y、X_z、X_w の値は2種類だけで $(n_1n_2+{n_3}^2)-(n_1n_3++n_2n_3)=(n_1-n_3)(n_2-n_3)>0$ だから $X_M-X_m=(n_1n_2+{n_3}^2)-(n_1n_3++n_2n_3)$

以上の3つの場合すべてで、同じ数が2個ある4個の数字の並びが $\dfrac{4!}{2!}=12$ 個あるから、この和は

$$\begin{aligned}S_{c4}&=12\sum_{n_1=1}^{n_0-2}\sum_{n_2=n_1+1}^{n_0-1}\sum_{n_3=n_2+1}^{n_0}\Big\{({n_1}^2+n_2n_3)-(n_1n_2++n_1n_3)\\&\quad+(n_1n_3+n_2n_3)-(n_1n_3++{n_2}^2)+(n_1n_2+{n_3}^2)-(n_1n_3++n_2n_3)\Big\}\\&=\frac{n_0(n_0-2)(n_0-1)(n_0+1)(7n_0+4)}{2}\end{aligned}$$

■C5　4個すべてが異なる　$(x,y,z,w)=(n_1,n_2,n_3,n_4)$
$X_y=n_1n_2+n_3n_4$、$X_z=n_1n_3+n_2n_4$、$X_w=n_1n_4++n_2n_3$。
$X_y-X_z=(n_1n_2+n_3n_4)-(n_1n_3+n_2n_4)=(n_1-n_4)(n_2-n_3)>0$
$X_z-X_w=(n_1n_3+n_2n_4)-(n_1n_4++n_2n_3)=(n_1-n_2)(n_3-n_4)>0$
(n_1,n_1,n_2,n_3,n_4) の並びを変えても X_y、X_z、X_w の値は3種類だけだから
$X_M-X_m=(n_1n_2+n_3n_4)-(n_1n_4++n_2n_3)$。4個の数の並びの個数が $4!=24$ 個あり、和は

$$\begin{aligned}S_{c5}&=24\sum_{n_1=1}^{n_0-3}\sum_{n_2=n_1+1}^{n_0-2}\sum_{n_3=n_2+1}^{n_0-1}\sum_{n_4=n_3+1}^{n_0}\Big\{(n_1n_2+n_3n_4)-(n_1n_4++n_2n_3)\Big\}\\&=\frac{n_0(n_0-3)(n_0-2)(n_0-1)(n_0+1)(5n_0+4)}{30}\end{aligned}$$

以上のことから、求める最大値と最小値の差 S は

$$S=S_{c3}+S_{c4}+S_{c5}=\frac{{n_0}^2(n_0-1)^2(n_0+1)^2}{6}$$

本問の $n_0=1000$ のとき

$$S=\frac{1000^2\cdot 999^2\cdot 1001^2}{6}=2^5\cdot 3^5\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 37^2$$

だから、この約数の個数は $(5+1)(5+1)(6+1)(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=20412$

下のプログラム MO2021P11T4.py で計算しています。

```
# coding: utf-8
from sympy import *
def MO2021P11T4():
    N=1000
    print('-------------------(x,y,z,w)=(n1,n1,n2,n2)')
    n0, n1, n2, n3, n4 = symbols('n0 n1 n2 n3 n4', integer=True)
    Sc3 = (6) * summation(summation((n1*n1+n2*n2) - (n1*n2+n1*n2), (n2, n1+1, n0))
                   , (n1, 1, n0-1))
    S0 = factor(Sc3)
    print(S0)
    print("Sc3=", S0.subs([(n0,N)]))
    print('-------------------(x,y,z,w)=(n1,n1,n2,n3),(n1,n2,n2,n3),(n1,n2,n3,n3)')
    Sc4 =  (12) * summation(summation(summation( ((n1*n1+n2*n3) - (n1*n3+n1*n2))
                  + ((n1*n2+n2*n3) - (n1*n3+n2*n2))
                  + ((n1*n2+n3*n3) -(n1*n3+n2*n3)), (n3, n2+1,n0))
                    , (n2, n1+1, n0-1))
                    , (n1, 1, n0-2))
    S0 = factor(Sc4)
    print(S0)
    print("Sc4=", S0.subs([(n0,N)]))
    print('-------------------(x,y,z,w)=(n1,n2,n3,n4)')
    Sc5 =  (24) * summation(summation(summation(summation((n1*n2+n3*n4)- (n1*n4+n2*n3)
                ,(n4, n3+1, n0))
                , (n3, n2+1,n0-1))
                , (n2, n1+1, n0-2))
                , (n1, 1, n0-3))
    S0 = factor(Sc5)
    print(S0)
    print("Sc5=", S0.subs([(n0, N)]))
    print('=============================')
    S = factor(Sc3 + Sc4 + Sc5)
    print(S)
    print("S=", S.subs([(n0, N)]))
if __name__ == '__main__':
    MO2021P11T4()
"""
N=10000
-------------------(x,y,z,w)=(n1,n1,n2,n2)
n0**2*(n0 - 1)*(n0 + 1)/2
Sc3= 499999500000
-------------------(x,y,z,w)=(n1,n1,n2,n3),(n1,n2,n2,n3),(n1,n2,n3,n3)
n0*(n0 - 2)*(n0 - 1)*(n0 + 1)*(7*n0 + 4)/10
Sc4= 698998501000800
-------------------(x,y,z,w)=(n1,n2,n3,n4)
n0*(n0 - 3)*(n0 - 2)*(n0 - 1)*(n0 + 1)*(5*n0 + 4)/30
Sc5= 165966834832999200
=============================
n0**2*(n0 - 1)**2*(n0 + 1)**2/6
S= 166666333333500000

"""
```