２０２１数学オリンピック予選　問題６

梅山新一郎 2021 年 2 月

以下の記述にあるプログラムは python で書かれています．ソースは梅屋萬年堂のホームページにあります．
http://umeyamann.web.fc2.com/

問 6

正の整数 n に対して、正の整数 m であって m と n が互いに素であり、$m+1$ と $n+1$ も互いに素となるようなもののうち最小のものを $f(n)$ で表す。このとき、$f(1)$、$f(2)$、$\cdots$、$f(10^{10})$ のうちに現れる正の整数は何種類あるか。

n が偶数のときと奇数のときとで $f(n)=m$ の m の値を考えます。

n が偶数のとき
$n=2k$ のとき $gcd(2k,1)=gcd(2k+1,2)=1$ [*1]だから $f(2k)=1$

n が奇数のとき
連続する整数は互いに素であり、$n=2k-1$ のとき $gcd(2k-1,2k)=gcd(2k,2k+1)=1$ だから $f(2k-1)=m$ の m は $2k$ 以下。さらに、m 奇数のとき $gcd(n+1,m+1)=gcd(2k,m+1)\geq 2$ となるから m は偶数でなければならない。つまり

$$f(2k-1)\in\{2,4,6,8,\cdots,2k\}\cdots Ⓐ$$

$n_i\in S_1=\{n|2k-1\}=\{1,3,5,\cdots,10^{10}-1\}$ とする。
$f(n_i)=m_i$、つまり $gcd(n_i,m_i)=gcd(n_i+1,m_i+1)=1$ のとき $n_{i+1}=(n_i+1)(m_i+1)-1$ となる n_{i+1} は、n_i が奇数だから $n_{i+1}\in S_1$ で、$gcd(n_{i+1}+1,m_i+1)=gcd((n_i+1)(m_i+1),m_i+1)=m_i+1>1$ だから、$f(n_{i+1})\neq m_i$

$$n_i\in S_1 \text{で} f(n_i)=m_i \text{のとき} n_{i+1}=(n_i+1)(m_i+1)-1 \text{となる} n_{i+1} \text{は、} f(n_{i+1})\neq m_i\cdots Ⓑ$$

この Ⓐ と Ⓑ から、S_i のなかで $f(n_i)=m_i$ となる m_i を求め、S_i から n_i を除いた
$S_{i+1}=S_i-\{n_i|f(n_i)=m_i\}$ の中から m_{i+1} $(>m_i)$ と順に n_i が 10^{10} を超えるまで m_i の値を定めていく。

[*1] $gcd(a,b)$ は a と b の最大公約数

1. $n_1 = 1(\in S_1)$ のとき
   $gcd(1,2) = gcd(2,3) = 1$ だから $f(1) = 2$
   次に、$n_2 = (1+1)(2+1)k - 1 = 6k - 1 \in S_2 = S_1 - \{n_1 | f(n_1) = 2\}$ とし
2. $n_2 = 5(\in S_2)$ のとき
   $gcd(5,4) = gcd(6,5) = 1$ だから $f(5) = 4$
   次に $n_3 = (5+1)(4+1)k - 1 = 30k - 1 \in S_3 = S_2 - \{n_2 | f(n_2) = 4\}$ とし
3. $n_3 = 29\ (\in S_3)$ のとき
   $gcd(29,6) = gcd(30,7) = 1$ だから $f(29) = 6$
   次に $n_4 = (29+1)(6+1)k - 1 = 210k - 1 \in S_4 = S_3 - \{n_3 | f(n_3) = 6\}$ とし
4. $n_4 = 209\ (\in S_4)$ のとき
   $gcd(209,8) = 1$, $gcd(210,9) = 3$ だから $f(209) \neq 8$
   $gcd(209,10) = gcd(209,11) = 1$ だから $f(209) = 10$
   次に $n_5 = (209+1)(10+1)k - 1 = 2310k - 1 \in S_5 = S_4 - \{n_4 | f(n_4) = 10\}$ とし
5. $n_5 = 2309\ (\in S_5)$ のとき
   $gcd(2309,12) = gcd(2310,13) = 1$ だから $f(2309) = 12$
   次に $n_6 = (2309+1)(12+1)k - 1 = 30030k - 1 \in S_6 = S_5 - \{n_5 | f(n_5) = 12\}$ とし
6. $n_6 = 30029\ (\in S_6)$ のとき
   $gcd(30029,14) = 1$, $gcd(30030,15) = 15$ だから $f(30029) \neq 14$
   $gcd(30029,16) = gcd(30030,17) = 1$ だから $f(30029) = 16$
   次に $n_7 = (30029+1)(16+1)k - 1 = 510510k - 1 \in S_7 = S_6 - \{n_6 | f(n_6) = 16\}$ とし
7. $n_7 = 510509\ (\in S_7)$ のとき
   $gcd(510509,18) = gcd(510510,19) = 1$ だから $f(510509) = 18$
   次に $n_8 = (510509+1)(18+1)k - 1 = 9699690k - 1 \in S_8 = S_7 - \{n_7 | f(n_7) = 18\}$ とし
8. $n_8 = 9699689\ (\in S_8)$ のとき
   $gcd(9699689,20) = 1$, $gcd(9699690,21) = 21$ だから $f(9699689) \neq 20$
   $gcd(9699689,22) = gcd(9699690,23) = 1$ だから $f(9699689) = 22$
   次に $n_9 = (9699689+1)(22+1)k - 1 = 223092870k - 1 \in S_9 = S_8 - \{n_8 | f(n_8) = 22\}$ とし
9. $n_9 = 223092869\ (\in S_9)$ のとき
   $gcd(223092869,24) = 1$, $gcd(223092870,25) = 5$ だから $f(223092869) \neq 24$
   $gcd(223092869,26) = 1$, $gcd(223092870,27) = 3$ だから $f(223092869) \neq 26$
   $gcd(223092869,28) = gcd(223092870,29) = 1$ だから $f(223092869) = 28$
   次に $n_{10} = (223092869+1)(28+1)k - 1 = 6469693230k - 1 \in S_{10} = S_9 - \{n_9 | f(n_9) = 28\}$ とし
10. $n_{10} = 6469693229\ (\in S_{10})$ のとき
    $gcd(6469693229,30) = gcd(6469693230,31) = 1$ だから $f(6469693229) = 30$

    $n_{11} = (6469693229+1)(30+1)k - 1 \geq 200560490130 > 10^{10}$ となり、ここで終了

以上から　m は $m = 1,2,4,6,10,12,16,18,22,28,30$ の 11 種類となる。

下のプログラム MO2021P6T2.py は、n が奇数の場合の m の値を求めています。

```
# coding: utf-8
from math import gcd
def MO2021P6T2():
    n, m, nm = 1, 2, 1*2
    while n <= 10**10:
        while not (gcd(n, m) ==1 and gcd(n+1, m+1) == 1):
            m += 2
        print(f'f({n})={m} , n={n} (= {nm}k - 1) ')
        nm = (n + 1) * (m + 1)
        n, m =  nm - 1, m + 2
if __name__ == '__main__':
    MO2021P6T2()

""" 実行結果
f(1)=2 , n=1 (= 2k - 1)
f(5)=4 , n=5 (= 6k - 1)
f(29)=6 , n=29 (= 30k - 1)
f(209)=10 , n=209 (= 210k - 1)
f(2309)=12 , n=2309 (= 2310k - 1)
f(30029)=16 , n=30029 (= 30030k - 1)
f(510509)=18 , n=510509 (= 510510k - 1)
f(9699689)=22 , n=9699689 (= 9699690k - 1)
f(223092869)=28 , n=223092869 (= 223092870k - 1)
f(6469693229)=30 , n=6469693229 (= 6469693230k - 1)
"""
```

さて n が奇数のときの、上記の計算では m_i の値が必要であったが、n_i から $f(n_{i+1}) > m_i$ となる n_{i+1} が m_i なしに作れれば計算は簡単になる。この計算で求めた n_i、m_i、n_i+1、m_i+1 を表にすると、

n_i	m_i	n_i+1	m_i+1
1	2	2	3
5	4	6	5
29	6	30	7
209	10	210	11
2309	12	2310	13
30029	16	30030	17
510509	18	510510	19
9699689	22	9699690	23
223092869	28	223092870	29
6469693229	30	6469693230	31

m_i+1 が素数になっていることがわかる。そこで、この m_i+1 が素数であることを考えて、
Ⓑ の $n_{i+1} = (n_i+1)(m_i+1) - 1$ で $n_1 = 2\cdot 1 - 1$ の次をいくつか計算し直してみると、
$n_2 = (2\cdot 1 - 1 + 1)\cdot 3 - 1 = 2\cdot 3 - 1$、$n_3 = (2\cdot 3 - 1 + 1)\cdot 5 - 1 = 2\cdot 3\cdot 5 - 1$
この形で n_i は、

$$p_1 = 2、p_2 = 3、p_3 = 5、\cdots と昇順にした\ i\ 番目の素数を\ p_i とし、n_i = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i - 1$$

とすると、$f(n_i) = m_i$ のとき $gcd(n_i+1, m_i+1) = 1$ より $gcd(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i, m_i+1) = 1$ だから、m_i+1 は、p_i より大きい素数。最小値を考えて p_i の次の素数 p_{i+1} となり、$f(n_i) = p_{i+1} - 1$。$n_{i+1} = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \times p_{i+1} - 1$ では $f(n_{i+1}) = p_{i+2} - 1$。

よって、n が奇数のときの m_i は、$2 \times 3 \times 5 \times \cdots$ の素数の積が 10^{10} をこえるまで数えることで

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29 = 6469693230 < 10^{10} < 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 29\cdot 31 = 200560490130$$

m_i は、$3-1=2$、$5-1=4$、$7-1=6$、$11-1=10$、$13-1=12$、$17-1=16$、$19-1=18$、$23-1=22$、$29-1=28$、$31-1=30$ 以上の１０種類となる。