２０１８数学オリンピック予選　問題　１、２、４、７、８、１１、１２

梅屋萬年堂 2018 年１月

以下の記述にあるプログラムは python で書かれています。ソースは梅屋萬年堂のホームページにあります。
`http://umeyamann.web.fc2.com/`

問題１　２桁の積に９が現れるには４９のみ。０が現れるのは（１０、２０、３０）$\cdots(a)$。５が現れるのは一の位にあるものが（１５、２５、３５）$\cdots(b)$。４９と (a) からと (b) からとで３個の積を選ぶと残り４個の数字に必ず６、７、８が残るがこの３個の数字でできる２桁に数はどれも九九の積にはならない。５が現れるのが十の位になる $7\times 8=56$ がある。４９と５６と (a) からの３０とで３個の積を選ぶと残り４個の数字は１、２、７、８であり、これから１８と２７が見つけられる。よってＪくんが選んだ積は４９、５６、３０、１８、２７で５が現れるのは　５６。

問題２　等差数列の組み合わせを作り、場合分けしながら数えていく。
１が入る組は（１、２、３)、(１、３、５)、(１、４、７)、(１、５、９)。この４組みを調べる。

- （１、２、３）４が入る組　（４、５、６)、(４、６、８）
  - （４、５、６）のとき（７、８、９）
  - （４、６、８）のとき（５、７、９）
- （１、３、５）２が入る組　（２、４、６）だけ。残りが（７、８、９）
- （１、４、７）２が入る組　（２、５、８）だけ。残りが（３、６、９）
- （１、５、９）２が入る組　（２、３、４）だけ。残りが（６、７、８）
  （２、４、６）では（３、７、８）が残る

　よって、以下の５通り
（１、２、３)（４、５、６)（７、８、９）
（１、２、３)（４、６、８)（５、７、９）
（１、３、５)（２、４、６)（７、８、９）
（１、４、７)（２、５、８)（３、６、９）
（１、５、９)（２、３、４)（６、７、８）
　これを等差数列をなす３項のすべてに組み合わせで計算したものが、`MO2018-02.py`。実行結果は以下の通り。

```
{2: [(1, 3)], 3: [(1, 5), (2, 4)], 4: [(1, 7), (2, 6), (3, 5)], 5: [(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)],
 6: [(3, 9), (4, 8), (5, 7)], 7: [(5, 9), (6, 8)], 8: [(7, 9)]}
1 : 1 2 3 , 4 5 6 , 7 8 9
2 : 1 2 3 , 4 6 8 , 5 7 9
3 : 1 3 5 , 2 4 6 , 7 8 9
4 : 2 3 4 , 1 5 9 , 6 7 8
5 : 1 4 7 , 2 5 8 , 3 6 9
```

問題 4　1111^2 を 11111 で割った余りが 10^3、10^5 を 11111 で割った余りが 1 であること
$1111^2 = 1111 \times 11111 + 10^3$、$10^5 = 9 \times 11111 + 1$ から
$1111^{2018} = (1111^2)^{1009} \equiv (10^3)^{1009}$
$(10^3)^{1009} = 10^{5\times 605+2} = (10^5)^{605} \times 10^2$
$(10^5)^{605} \times 10^2 \equiv 1^{605} \times 10^2 \equiv 100 \pmod{11111}$

問題 7　i と j とのペア (i, j) で $i < j$ とする。
$\sum_{k=1}^{6} |i-j| = \sum_{k=1}^{6} j - \sum_{k=1}^{6} i = 30 \cdots$ ① これと $\sum_{k=1}^{6} j + \sum_{k=1}^{6} i = \sum_{n=1}^{12} k = 78$ とから
$\sum_{k=1}^{6} i = 24$、$\sum_{k=1}^{6} j = 54$
i を $(1, 2, 3, \cdots)$ とかぞえていくと、i と j は以下の 3 通り
(a)i が $(1, 2, 3, 4, 5, 9)$、j が $(6, 7, 8, 10, 11, 12)$
(b)i が $(1, 2, 3, 4, 6, 8)$、j が $(5, 7, 9, 10, 11, 12)$
(c) i が $(1, 2, 3, 5, 6, 7)$、j が $(4, 8, 9, 10, 11, 12)$
　i の列に対して j 順列 $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$ を対応させれば、① を満たすペアができ、それぞれ $6! = 720$ 通りずつある。ただし、(a)(b)(c) それぞれで条件を満たさない組み合わせがある。
(a) では j_6 には $6, 7, 8$ は不適。$j_6 = 6$ のとき、(i_6, j_6) は 9 と 6 のペアでその差は３。残りの数の i と j それぞれの和が $1+2+3+4+5 = 15$、$7+8+10+11+12 = 48$ となり差の総和が３０にならない。j_6 が１０か１１か１２のときは条件を満たす。例えば $j_6 = 10$ の時は、$10 - 9 = 1$、$6+7+8+11+12 = 44$ で $44 - 15 + 1 = 30$ である。
同様にして調べると (b) では $j_5 \neq 5$、$j_6 \neq 5, 7$。(c) では $j_4, j_5, j_6 \neq 4$。これらのものをとりのぞくと、
$(6! - 5! \times 3) + (6! - (5! \times 2 - 4!)) + (6! - 5! \times 3) = 360 + 384 + 360 = 1104$
　これを確認したのが、`MO2018-07.py`。実行結果は以下の通り。

```
1104 360 384 360
(a) i (1,2,3,4,5,9)
     [j1,j2,j3,j4,j5,j6] =  [{6, 7, 8, 10, 11, 12}, {6, 7, 8, 10, 11, 12}, {6, 7, 8, 10, 11, 12}
            , {6, 7, 8, 10, 11, 12}, {6, 7, 8, 10, 11, 12}, {10, 11, 12}]
(b) i (1,2,3,4,6,8)
     [j1,j2,j3,j4,j5,j6] =  [{5, 7, 9, 10, 11, 12}, {5, 7, 9, 10, 11, 12}
           , {5, 7, 9, 10, 11, 12}, {5, 7, 9, 10, 11, 12}, {7, 9, 10, 11, 12}, {9, 10, 11, 12}]
(c) i (1,2,3,5,6,7)
     [j1,j2,j3,j4,j5,j6] =  [{4, 8, 9, 10, 11, 12}, {4, 8, 9, 10, 11, 12}
         , {4, 8, 9, 10, 11, 12}, {8, 9, 10, 11, 12}, {8, 9, 10, 11, 12}, {8, 9, 10, 11, 12}]
```

問題 8　求める和 S は

$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_6b_6 + b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_6c_6 + c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_6a_6$

$= (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1) + (a_2b_2 + b_2c_2 + c_3a_3) + \cdots + (a_6b_6 + b_6c_6 + c_6a_6)$

$(a_ib_i + b_ic_i + c_ia_i) = \big((a_i + b_i + c_i)^2 - (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)\big) \times \dfrac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ だから

$S = \sum_{i=1}^{6} \big((a_i + b_i + c_i)^2 - (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)\big) \times \dfrac{1}{2} = \left(\sum_{i=1}^{6}(a_i + b_i + c_i)^2 - \sum_{i=1}^{6}(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)\right) \times \dfrac{1}{2}$

ここで $\sum_{i=1}^{6}(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = \sum_{i=1}^{6} a_i^2 + \sum_{i=1}^{6} b_i^2 + \sum_{i=1}^{6} c_i^2 = 3 \times \sum_{k=1}^{6} k^2 = 273$

$(a_i + b_i + c_i)^2$　$(i = 1, 2, \cdots, 6)$ が最小のとき S が最小。１から６までの整数３組の総和が６３だから $a_i + b_i + c_i$ が１０と１１となる組み３組ずつ見つければよい。

$a = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$b = (3, 4, 5, 6, 1, 2)$

$c = (6, 4, 2, 1, 5, 3)$

であれば、$S = ab + bc + ca = 67 + 61 + 67 = 195$

他にも組み合わせはあり、

$a = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$b = (3, 4, 5, 6, 1, 2)$

$c = (6, 4, 2, 1, 5, 3)$

のときは、$S = 68 + 65 + 62 = 195$ である。このような組み合わせが全部で１７４組あることがプログラム MO2018-08.py でわかる。求める最小値は１９５。

問題 11　n の７進数表示を

$n = a_k \cdot 7^{k-1} + a_{k-1} \cdot 7^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 7 + a_1 \cdots$ ① とする。このとき

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} n_i &= a_k \cdot 7^{k-2} + a_{k-1} \cdot 7^{k-3} + \cdots + a_3 \cdot 7 + a_2 \\
&= a_k \cdot 7^{k-2} + a_{k-1} \cdot 7^{k-3} + \cdots + a_3 \cdot 7 + a_1 \\
&= \cdots \\
&= a_k \cdot 7^{k-2} + a_{k-1} \cdot 7^{k-3} + \cdots + a_2 \cdot 7 + a_1 \\
&= a_k \cdot 7^{k-2} + a_{k-2} \cdot 7^{k-3} + \cdots + a_2 \cdot 7 + a_1
\end{aligned}$$

$= (k-1)a_k \cdot 7^{k-2} + ((k-2)a_{k-1} + a_{k-2}) \cdot 7^{k-3} + \cdots + (2a_3 + (k-3)a_2) \cdot 7 + (a_2 + (k-2)a_1)$

$a_k \cdot 7^{k-1} = (k-1)a_k \cdot 7^{k-2}$ のとき $k - 1 = 7$ より $k = 8$。c_i を i 位からの繰り上がり、$\equiv$ を７の剰余とすると、

$a_1 \equiv a_2 + 6a_1$

$a_2 \equiv 2a_3 + 5a_2 + c_1$

$a_3 \equiv 3a_4 + 4a_3 + c_2$

$a_4 \equiv 4a_5 + 3a_4 + c_3$

$a_5 \equiv 5a_6 + 2a_5 + c_4$

$a_6 \equiv 6a_7 + a_6 + c_5$

$a_7 \equiv 7a_8 + c_6$

この関係式を使い $a_1.a_2,\cdots,a_7$ を求める。
$a_1=0$ のとき、$a_2=a_3=\cdots=a_7=0$
$a_1=1$ のとき、$1\equiv a_2+6$ から $a_2=2,c_1=1$。$2\equiv 2a_3+10+1$ から $a_3=6,c_2=3$。
$6\equiv 3a_4+24+3$ から $a_4=0,c_3=3$。$0\equiv 4a_5+0+3$ から $a_5=1,c_4=1$。
$1\equiv 5a_6+2+1$ から $a_6=1,c_5=1$。$1\equiv 6a_7+1+1$ から $a_7=1$。
$a1=2,3,4,5,6$ のときも、同様に調べると $(a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)$ は以下の 7 通り
$(0,0,0,0,0,0,0)$、$(1,1,1,0,6,2,1)$、$(,5,1,3,5,4,2)$、$(2,2,1,6,4,6,3)$、$(1,0,4,2,0,1,4)$、$(2,1,5,2,6,3,5)$、$(5,5,5,5,5,5,6)$

$a_8=1,2,\cdots,6$ のそれぞれに対して上の 7 通りがあり、全部で $6\times 7=42$
プログラム MO2018-11.py は 7^2 から 7^8-1 までの全数から４２個の数を求めている。その実行結果は以下の通り

```
  1 :   823543  [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]       2 :   951493  [1, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]
  3 :   960709  [1, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]       4 :  1088659  [1, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]
  5 :  1097155  [1, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]       6 :  1381879  [1, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]
  7 :  1509829  [1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]       8 :  1647086  [2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
  9 :  1775036  [2, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]      10 :  1784252  [2, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]
 11 :  1912202  [2, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]      12 :  1920698  [2, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]
 13 :  2205422  [2, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]      14 :  2333372  [2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]
 15 :  2470629  [3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]      16 :  2598579  [3, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]
 17 :  2607795  [3, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]      18 :  2735745  [3, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]
 19 :  2744241  [3, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]      20 :  3028965  [3, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]
 21 :  3156915  [3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]      22 :  3294172  [4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
 23 :  3422122  [4, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]      24 :  3431338  [4, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]
 25 :  3559288  [4, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]      26 :  3567784  [4, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]
 27 :  3852508  [4, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]      28 :  3980458  [4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]
 29 :  4117715  [5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]      30 :  4245665  [5, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]
 31 :  4254881  [5, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]      32 :  4382831  [5, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]
 33 :  4391327  [5, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]      34 :  4676051  [5, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]
 35 :  4804001  [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]      36 :  4941258  [6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
 37 :  5069208  [6, 1, 0, 4, 2, 0, 1, 4]      38 :  5078424  [6, 1, 1, 1, 0, 6, 2, 1]
 39 :  5206374  [6, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 5]      40 :  5214870  [6, 2, 2, 1, 6, 4, 6, 3]
 41 :  5499594  [6, 4, 5, 1, 3, 5, 4, 2]      42 :  5627544  [6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6]
```

問題 12　たいへんアヤシイ怪答ですが　(^^;;

３０以上で $|m-n| \geq 2018$ を満たす m の最小数が２０４８

２０４８から４０６５ $(4066 = 2048 + 2018)$ の m と n とでは差を２０１８だけとれない

とのことから N の対象となる３０以上の項番号を以下の３つのグループに分ける。

$S_1 = \{N|30 \leq N \leq 2047\}$、$S_3 = \{N|4066 \leq N\}$ のとき $a_N = N$（自然数）

$S_2 = \{N|2048 \leq N \leq 4065\}$ のとき $a_N = N - 1$（定数）

このとき

m, n	$a_N = a_{m+n}$	$a_{m+n} = a_m + n$	$a_{m+n} = a_n + m$
S_3, S_3	$m+n$	$m+n$	$n+m$
S_3, S_2	$m+n-1$	$m+n$	$n-1+m$
S_3, S_1	$m+n$	$m+n$	$n+m$
S_2, S_1	$m+n \in S_3$ のとき		
	$m+n$	$m-1+n$	$n+m$
	$m+n \in S_2$ のとき		
	$m+n-1$	$m-1+n$	$n+m$

このようにいずれの場合も $a_{m+n} = a_m + n$ または $a_{m+n} = a_n + m$ のルールを満たし、$a_{4066} - a_{4065} = 4066 - (4065 - 1) = 2 \neq 1$、$S_3$ では $a_{N+1} - a_N = (N+1) - N = 1$ となる。よって求める N の最大数は４０６５