２０１９数学オリンピック予選　問題　１１

梅屋萬年堂 2018 年 2 月

問題 11　本題の $f(k)$ は、$N = 2019^3$ として、$km = Nq + r(0 \leq r < N)$ において、余り $r > m$ となる個数を表します。この定義からそれぞれの k に対して調べる整数 m は $1 \leq m \leq N$ となります。$f(1) = f(N) = 0$ 以外は検討もつかないので N=2019 として $k = 1 \cdots 2019$ にて全数調査をしてみます。その結果と k についての推測は以下のようになりました。

- $f(1) = 0 \cdots$ Ⓐ
  $1 \times m = N \times 0 + r$ だから、$r = m$
- $f(2019) = 0 \cdots$ Ⓑ
  $2019 \times m = N \times m + 0$ だから、$r = 0 < m$
- $f(2) = 1009 \cdots$ Ⓒ
  $km_1 = Nq + r_1$ のとき余り r_1 が $r_1 > m_1$ であるとき、$m_2 = N - m_1$ のときの余りを r_2 とすると、$km_2 = k(N - m_1) = N(k - q - 1) + N - r_1$ より $r_2 = N - r_1$
  $r_2 = N - r_1 < N - m_1 = m_2$ よって $r_2 < m_2$
  「半分」で余りが大きくなるはず。実際、$m = 1 \cdots 1009$ では $2 \times m = 2 \cdots 2018 = 2019 \times 0 + 2 \cdots 2018$ だから $r > m$、$m = 1010 \cdots 2018, 2019$ では $2 \times m = 2010 \cdots 4036, 4038 = 2019 \times 1 + 1 \cdots 2017, 0$ で $r < m$
  さて、2019 ちょうど「半分」にはならないのですが、何かあるのかな？と思いいくつかの $f(k)$ をひろってみます。すると $k = 2, 5, 8, 11, \cdots$ では $f(k) = 1009$、$k = 3, 5, 6, 7, \cdots$ では $f(k) = 1008$ で 1 個の差が出ます。2019 の素因数は 3 と 673 です。$m = 673$ のときのこの二つのグループ $k = 3\ell + 2$ と $k = 3\ell, 3\ell + 1$ で調べると前者は、$k \times 673 = (3\ell + 2) \times 673 = 2019\ell + 1346 \equiv 1346 > 673 (mod\ 2019)$、後者は $k \times 673 = 3\ell \times 673 = 2019\ell \equiv 0 (mod\ 2019)$ と $k \times 673 = (3\ell + 1) \times 673 = 2019\ell + 673 \equiv 673 (mod\ 2019)$ となり、この $m = 673$ の違いとなっています。
  $k = 3\ell + 2$ のときには $f(k) = 1009$ で下の Ⓓ は
- $f(3) = 1008 \cdots$ Ⓓ $k = 3\ell$ または $k = 3\ell + 1$ のときには $f(k) = 1008$ となります。
- $f(673) = 672 \cdots$ Ⓔ
  このケースは Ⓑ のような余りが 0 となる m をもちます。では、$f(673)$ を求めてみます。
  $m = 3\ell, 3\ell + 1, 3\ell + 2$ にわけて求めます。
  $m = 3\ell$ のときは $km = 673 \times 3\ell = 2019\ell \equiv 0 (mod\ 2019)$
  　$\ell = 0 \cdots 673 (m = 3 \cdots 2019)$ で $r = 0$
  $m = 3\ell + 1$ のときは $km = 673 \times (3\ell + 1) = 2019\ell + 673 \equiv 673 (mod\ 2019)$
  　$\ell = 0 \cdots 223 (m = 1 \cdots 669)$ で $r > m$
  　$\ell = 224 \cdots 672 (m = 673 \cdots 2017)$ で $r \leq m$
  $m = 3\ell + 2$ のときは $km = 673 \times (3\ell + 2) = 2019\ell + 1346 \equiv 1346 (mod\ 2019)$
  　$\ell = 0 \cdots 447 (m = 2 \cdots 1343)$ で $r > m$
  　$\ell = 448 \cdots 672 (m = 1346 \cdots 2018)$ で $r \leq m$
  以上から $r > m$ となる $f(673) = 224 + 448 = 672$

- $f(674) = 673 \cdots$ Ⓕ
Ⓐ のようになる k が 1 以外にあるとすると、
$km = Nq + m$ から $(k-1)m = Nq$ だから $k-1$ が 673 のときの $k = 674$。ケース Ⓔ のように求めると
$m = 3\ell$ のときは $km = 674 \times 3\ell = (673+1) \times 3\ell = 2019\ell + 3\ell \equiv m(mod\ 2019)$
  $\ell = 0 \cdots 673(m = 3 \cdots 2019)$ で $r = m$
$m = 3\ell + 1$ のときは $km = 674 \times (3\ell + 1) = 2019\ell + 673 + 3\ell + 1 \equiv 673 + m(mod\ 2019)$
  $\ell = 0 \cdots 448(m = 1 \cdots 1345)$ で $r > m$
  $\ell = 449 \cdots 672(m = 1347 \cdots 2017)$ で $r < m$
$m = 3\ell + 2$ のときは $km = 674 \times (3\ell + 2) = 2019\ell + 1346 + m \equiv 1346 + m(mod\ 2019)$
  $\ell = 0 \cdots 223(m = 2 \cdots 671)$ で $r > m$
  $\ell = 224 \cdots 672(m = 671 \cdots 2018)$ で $r < m$
以上から $r > m$ となる $f(673) = 449 + 224 = 673$

以上のケース Ⓐ から Ⓕ を $N = 2019^3$ に適用し、コンピュータで計算します。

A,B $f(1) = 0, f(2019^3) = 0$

C $f(2) = 4115086429$

D $f(3) = 4115086428$

E $f(3^2) = 4115086425,\ f(3^3) = 4115086416,$
$f(673) = 4115086092,\ f(3 * 673) = 4115085420,\ f(3^2 * 673) = 4115083401,$
$f(3^3 * 673) = 4115077344,$
$f(673^2) = 4114859964,\ f(3 * 673^2) = 4114407036,\ f(3^2 * 673^2) = 4113048249,$
$f(3^3 * 673^2) = 4108971888,$
$f(673^3) = 3962675817,\ f(3 * 673^3) = 3657854604,\ f(3^2 * 673^3) = 2743390953$

F $f(673 + 1) = 4115086093,\ f(673^2 + 1) = 4114859965,\ f(673^3 + 1) = 3962675821$

G $f(4 * 673) = 4115086089,\ f(13 * 673) = 4115086080,$
$f(7 * 673^2) = 4114859952, f(43 * 673^2) = 4114859961,$
$f(4 * 673^3) = 3962675820,\ f(10 * 673^3) = 3962675808$

ケース A から F までで１９個あります。ケース G はケース F がほかにもあるのかと試行錯誤した結果です。G を入れて２５個です。

昨年のもの同様に「あたいへんアヤシイもので」、残念ながらこれでは「解答」になりませんが、こんな「数字ひろい」もありました、というレポートです。(^^;)

なおこのレポートに使った python のプログラムリストと実行結果の一部（MO2019P11AA.py,MO2019P11C.py, MO2019P11Check.py）はホームページ（http:umeyamann.web.fc2.com）にありますのでご覧ください。