２０１９数学オリンピック予選　問題　１１　の考察

この問題の解説を聞いて、なんとか理解できました。最初に書いたレポートに解説で理解できたものを加えてレポートの第２版とします。梅屋萬年堂 2019 年 2 月

1　まず、問題のサイズを小さくして

本題の $f(k)$ は、$N = 2019^3$ として、$km = Nq + r (0 \leq r < N)$ において、余り $r > m$ となる個数を表します。この定義から $f(N) = 0$ です。さらに N より大きい m であっても余りは N より小さいのだから、余りが m より大きくなることはなく、それぞれの k に対して調べる整数 m は $1 \leq m < N$ にある $N-1$ 個の整数となります。したがって $f(k)$ の値は $0 \leq f(k) < N$ というものになります。

$f(1) = f(N) = 0$ 以外は検討もつかないので N=2019 として $k = 1 \cdots 2019$ にて全数調査をしてみます。その結果と k についての推測は以下のようになりました。

- $f(1) = 0 \cdots$ Ⓐ
  $1 \times m = N \times 0 + r$ だから、$r = m$
- $f(2019) = 0 \cdots$ Ⓑ
  $2019 \times m = N \times m + 0$ だから、$r = 0 < m$
- $f(2) = 1009 \cdots$ Ⓒ
  $km_1 = Nq + r_1$ のとき余り r_1 が $r_1 > m_1$ であるとき、$m_2 = N - m_1$ のときの余りを r_2 とすると、
  $km_2 = k(N - m_1) = N(k - q - 1) + N - r_1$ より $r_2 = N - r_1$
  $r_2 = N - r_1 < N - m_1 = m_2$ よって $r_2 < m_2$
  さて、ここがポイントです。

  余りが m より大きくなる場合に、それに対応する小さくなる場合ついて上で述べました。この対象から外れるのは余りがが 0 か m になる場合です。

  この二つの場合を除けば「半分」で余りが大きくなります。(半分で小さくなります) 実際、$m = 1 \cdots N-1$ で考えると、$m = 1 \cdots 1009$ では $2 \times m = 2 \cdots 2018 = 2019 \times 0 + 2 \cdots 2018$ だから $r > m$、$m = 1010 \cdots 2018, 2019$ では $2 \times m = 2010 \cdots 4036, 4038 = 2019 \times 1 + 1 \cdots 2017, 0$ で $r < m$。
  余りが 0 や m 自身になることもない。ここも解説で学んできたことですが

  二つの整数の積 km が N の倍数となることと m が $\dfrac{N}{gcd(k, N)}$ の倢数となることと同値。
  (gcd(k, N) は k と N の最大公約数) $\cdots$ (T1)

  すると $gcd(2, 2019) = 1$ だから $m = \dfrac{2019}{1}$ の倍数、ですが調べている m は 2018 までですから、余りが 0 になる m はない。次に、$km = Nq + m$ から $(k-1)m = Nq$ だから、

  積 km の N で割った余りが m になることは、$(k-1)m$ が N の倍数となることであり、m が $\dfrac{N}{gcd(k-1, N)}$ の倍数となることと同値。($gcd(k-1, N)$ は k と N の最大公約数) $\cdots$ (T2)

  m が $\dfrac{N}{gcd(k-1, N)}$ の倍数となることはgcd(2-1,2019)=1 だからないので余りが m に等しくなることもない。
- $f(3) = 1008 \cdots$ Ⓓ 2019 の素因数は 3 と 673 です。この $k = 3$ のときは、$m = 673, 673 \times 2 (= 1346)$ の 2 箇所で余りが 0 になるので、$f(3) = \left(\dfrac{2018 - 2}{2}\right) = 1008$ となります。
- $f(673) = 672 \cdots$ Ⓔ
  $k = 3$ の時と同様に $m = 3, 3 \times 2 \cdots 3 \times 672 (= 2016)$ の６７２箇所で余りが 0 になり、$m = 673 (= 3 \times 224 + 1), 1346 (= 3 \times 448 + 1)$ で余りは m なるので、$f(3) = \left(\dfrac{2018 - 672 - 2}{2}\right) = 672$ となります。

- $f(674)=673\cdots$Ⓕ
  Ⓐ のようになる k が 1 以外にあるとすると、上に述べたことで $k-1$ が 673 のときの $k=674$。このときに、T2 から余りが 1 となるは、$gcd(674-1,2019)=3$ であり $m=3,3\times 2\cdots 3\times 672(=2016)$ の 672 箇所で余りが m になる。なお、$gcd(674,2019)=1$ で、T1 から余りが 0 となる $674m$ が 2019 の倍数となる 2019 より小さい m はない。よって $f(674)=\left(\dfrac{2018-672}{2}\right)=673$ となります。

2　$f(k)$ 計算して、観察してみる

さて、これで問１１の解答方針はできたのですが、この解説を聞く前に、以上のケース Ⓐ から Ⓕ を $N=2019^3$ に適用し、コンピュータで計算しましたので、その結果を書いておきます。$f(k)$ の値がどんなものかを観察できるだけのことですが。

A,B　$f(1)=0$,$f(2019^3)=0$

C　$f(2)=4115086429$

D　$f(3)=4115086428$

E　$f(3^2)=4115086425$, $f(3^3)=4115086416$,
$f(673)=4115086092$, $f(3*673)=4115085420$, $f(3^2*673)=4115083401$,
$f(3^3*673)=4115077344$,
$f(673^2)=4114859964$, $f(3*673^2)=4114407036$, $f(3^2*673^2)=4113048249$,
$f(3^3*673^2)=4108971888$,
$f(673^3)=3962675817$, $f(3*673^3)=3657854604$, $f(3^2*673^3)=2743390953$

F　$f(673+1)=4115086093$, $f(673^2+1)=4114859965$, $f(673^3+1)=3962675821$

G　$f(4*673)=4115086089$, $f(13*673)=4115086080$,
$f(7*673^2)=4114859952$,$f(43*673^2)=4114859961$,
$f(4*673^3)=3962675820$, $f(10*673^3)=3962675808$

ケース A から F までで１９個あります。ケース G はケース F がほかにもあるのかと試行錯誤した結果です。G を入れて２５個です。ここまでの計算に使った python のプログラムリストと実行結果の一部（MO2019P11AA.py,MO2019P11C.py, MO2019P11Check.py）はホームページ（http://umeyamann.web.fc2.com）にありますのでご覧ください。

3　$f(k)$ は２５種類

では問１１の解答の後半部分です。以下は解説で学んだことを書いてみたというものです。いずれ公開されるでしょうが、「解説」はとてもエレガントなもので、たいへん勉強になりました。

$$f(k)=\frac{N-1-(\text{余りが }0\text{ または }m\text{ となる }m\text{ の個数})}{2}\cdots(T3)$$

だから、余りが 0 または m となる m の個数を $g(k)$ とおくと、求める $f(k)$ の種類数は $g(k)$ の種類数を考えればよいことになります。

では、余りが 0 になる場合、（Ｔ１）から m が $\dfrac{N}{gcd(k,N)}$ の倍数となることだから、その m の個数は、$1\le m<N$ の範囲では $gcd(k,N)-1$ だけあります。余りが m に等しくなるのは（Ｔ２）から m が $\dfrac{N}{gcd(k-1,N)}$ の倍数となることだから、その m の個数は、$1\le m<N$ の範囲では $gcd(k-1,N)-1$ だけあります。よって、k の余りが 0 か m になる個数 $g(k)$ は

$$g(k)=gcd(k,N)-1+gcd(k-1,N)-1\cdots(T4)$$

になります。

2 で求めた数に対して、(T4) を使って $f(k)$ を求めてみます。

k	$gcd(k,N)$	$gcd(k-1,N)$	$g(k)$	$f(k)$	$gcd(k,2019)$	$gcd(k-1,2019)$
1	1	3^3*673^3	8230172858	0	1	$3*673$
$3*673$	$3*673$	1	2018	4115085420	$3*673$	1
3^2*673	3^2*673	1	6056	4115083401	$3*673$	1
3^3*673	3^3*673	1	18170	4115077344	$3*673$	1
$3*673^2$	$3*673^2$	1	1358786	4114407036	$3*673$	1
3^2*673^2	3^2*673^2	1	4076360	4113048249	$3*673$	1
3^3*673^2	3^3*673^2	1	12229082	4108971888	$3*673$	1
$3*673^3$	$3*673^3$	1	914463650	3657854604	$3*673$	1
3^2*673^3	3^2*673^3	1	2743390952	2743390953	$3*673$	1
2	1	1	0	4115086429	1	1
3	3	1	2	4115086428	3	1
3^2	3^2	1	8	4115086425	3	1
3^3	3^3	1	26	4115086416	3	1
673	673	3	674	4115086092	673	3
673^2	673^2	3	452930	4114859964	673	3
673^3	673^3	3^2	304821224	3962675817	673	3
$673+1$	1	673	672	4115086093	1	673
673^2+1	1	673^2	452928	4114859965	1	673
673^3+1	1	673^3	304821216	3962675821	1	673
$4*673$	673	3^2	680	4115086089	673	3
$13*673$	673	3^3	698	4115086080	673	3
$7*673^2$	673^2	3^3	452954	4114859952	673	3
$43*673^2$	673^2	3^2	452936	4114859961	673	3
$4*673^3$	673^3	3	304821218	3962675820	673	3
$10*673^3$	673^3	3^3	304821242	3962675808	673	3

うまくいってます。では、このように最大公約数を使って $g(k)$ を求めるにはどうしたらよいのでしょうか。その答えが次にあります。

$gcd(k,N)$ と $gcd(k-1,N)$ はともに N の約数で互いに素。
つまり $g(k)$ は N の互いに素な約数の二つの和から 2 を引いたものです。

N の約数は $2019 = 3 \times 673$ だから $3^i 673^j$ の形になります、その中で互いに素となるなる二つの約数は 1 と $3^i 673^j$ $(1 \le i,j \le 3)$ か、3^i $(0 \le i \le 3)$ と 673^i $(0 \le i \le 3)$ の二つのグループに分かれます。前者は最大公約数の一つが $3^1 673^1 = 2019$ の倍数になっているグループで、後者はそれがないグループです。

(I) $gcd(k,N)$ と $gcd(k-1,N)$ の一方が 2019 の倍数で k を 2019 の倍数でかつ $N = 2019^3$ の約数とするとこのグループは i,j の組み合わせで $3 \times 3 = 9$ 通りが考えられ、上の表の初めの 9 つにあります。これは簡単に拾うことができます。$k=1$ のときに $gcd(k-1,N) = gcd(0,N)$ となりますが、これを N 自身として 2019 の倍数があるものと考えられます。
$k = 2019 \times 3^i \times 673^j \quad (i,j = 0 \cdots 2)$ であれば $gcd(k,N) = k$ で $gcd(k-1,N) = 1$
$k-1$ が倍数の場合も同じ。よって、$gcd(k) = k+1-2$
$g(3^2 \times 673)$ を例にしてみます。$gcd(3^2 \times 673, 219^3) = 3^2 \times 673$、$gcd(3^2 \times 673 - 1, 2019^3) = 1$ だから $g(3^2 \times 673) = 3^2 \times 673 + 1 - 2 = 6056$。
上の (T3) によって $f(3^2 \times 673)$ を求めると $\dfrac{2019^3 - 1 - (6056)}{2} = 4115083401$ 素晴らしい！前のケース (E) にある $f(3^2 * 673) = 4115083401$ と一致する。（あたりまえですが (^^;)）ここに分類される k は $3*673$、3^2*673、3^3*673、$3*673^2$、3^2*673^2、3^3*673^2、$3*673^3$、3^2*673^3 と 1 の以上の 3×3 個。

(II) $gcd(k,N)$ と $gcd(k-1,N)$ ともに N の約数で 2019 の倍数ではないとき
この後者グループはどうでしょうか。こちらも互いに素となる N の約数の組み合せができており、一

方が 3^i で他方が 673^j の形に特定できるからです。i,j の組み合わせで $4\times4=16$ 通りが考えられます。ただし、こちらはこの条件を満たす k があることを示さなければなりません。最大公約数がそれぞれ累乗の形を持つ k として、$k\equiv 2\times 3^i\ mod\ 3^3$ と $k-1\equiv 673^i\ mod\ 673^3$ をともに満たすものを考えます。($k\equiv 3^i\ mod\ 3^3$ では 2019 の倍数が出てきます) 「解説」の方では、この合同式を満たす k があるから、この後者のグループの個数は 16 個としています。その通りなのなのですが、その k はどのような数なのでしょうか？実際に１６通りの連立合同式を解いて、最小の k をみてみましょう。ここが python のライブラリーが豊富でありがたいところです。sympy には連立合同式を解くモジュールがありますので簡単に解は求められました。ご覧ください。

i	j	一般解	最小の k	$gcd(k,N)$	$gcd(k-1,N)$
0	0	$2+8230172859t$	2	1	1
0	1	$914464325+8230172859t$	914464325	1	673
0	2	$7316162138+8230172859t$	7316162138	1	673^2
0	3	$3048212171+8230172859t$	3048212171	1	673^3
1	0	$3962675823+8230172859t$	3962675823	3	1
1	1	$4877140146+8230172859t$	4877140146	3	673
1	2	$3048665100+8230172859t$	3048665100	3	673^2
1	3	$7010887992+8230172859t$	7010887992	3	673^3
2	0	$7620530427+8230172859t$	7620530427	3^2	1
2	1	$304821891+8230172859t$	304821891	3^2	673
2	2	$6706519704+8230172859t$	6706519704	3^2	673^2
2	3	$2438569737+8230172859t$	2438569737	3^2	673^3
3	0	$2133748521+8230172859t$	2133748521	3^3	1
3	1	$3048212844+8230172859t$	3048212844	3^3	673
3	2	$1219737798+8230172859t$	1219737798	3^3	673^2
3	3	$5181960690+8230172859t$	5181960690	3^3	673^3

これで全て解けました。上記の k を使って $g(k)$ や $f(k)$ を求めた結果の表を載せておきます。

i	j	k	$k\ mod\ 3^3$	$k-1\ mod\ 673^3$	$gcd(k,N)$	$gcd(k-1,N)$	$g(k)$	3^i+673^j-2	$f(k)$
0	0	2	2	1	1	1	0	0	4115086429
0	1	914464325	2	673	1	673	672	672	4115086093
0	2	7316162138	2	673^2	1	673^2	452928	452928	4114859965
0	3	3048212171	2	0	1	673^3	304821216	304821216	3962675821
1	0	3962675823	$2*3$	1	3	1	2	2	4115086428
1	1	4877140146	$2*3$	673	3	673	674	674	4115086092
1	2	3048665100	$2*3$	673^2	3	673^2	452930	452930	4114859964
1	3	7010887992	$2*3$	0	3	673^3	304821218	304821218	3962675820
2	0	7620530427	$2*3^2$	1	3^2	1	8	8	4115086425
2	1	304821891	$2*3^2$	673	3^2	673	680	680	4115086089
2	2	6706519704	$2*3^2$	673^2	3^2	673^2	452936	452936	4114859961
2	3	2438569737	$2*3^2$	0	3^2	673^3	304821224	304821224	3962675817
3	0	2133748521	0	1	3^3	1	26	26	4115086416
3	1	3048212844	0	673	3^3	673	698	698	4115086080
3	2	1219737798	0	673^2	3^3	673^2	452954	452954	4114859952
3	3	5181960690	0	0	3^3	673^3	304821242	304821242	3962675808